Παρατήρηση: $\forall U \subset \mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n = \mathring{U} \cup \partial U \cup (\mathbb{R}^n \setminus U)^\circ$

Μαθηματική ερμηνεία:

- $\mathring{U} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : (\exists \varepsilon > 0) : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U \}$ = { εσωτερ. σημεία του U }
- $(\mathbb{R}^n \setminus U)^\circ = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : (\exists \varepsilon > 0) : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U \}$ = { εξωτ. σημεία του U }
- $\partial U = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : (\forall \varepsilon > 0) : B(\bar{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \emptyset \wedge B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset \}$
  = { συνοριακά σημεία του U }.

Παραδείγματα:

1) Έστω $U = B(\bar{x}_0, r)$, $r>0$. δηλ. $U = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\}$
Να βρείτε τα εσωτερικά – εξωτερικά σημεία καθώς και τα συνοριακά σημεία του U.

ΛΥΣΗ

- Το $U = B(\bar{x}_0, r)$ είναι ανοιχτό $\overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} (\forall \bar{x} \in U)(\exists \varepsilon > 0) : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$
$\Rightarrow$ ① $U \subset \mathring{U}$ $[\Leftrightarrow (\forall \bar{x} \in U) : \bar{x}$ εσωτερ. σημ.$]$

Από την άλλη $(\forall U \subset \mathbb{R}^n) : \mathring{U} \subset U$ ②

Άρα, $U = \mathring{U} \underset{\circledast}{\overset{\text{ορ}}{\Longrightarrow}} U$ ανοικτό

Απόδειξη

⊛ Έστω $\bar{x} \in U = \mathring{U} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$ (αρα απο ορισμο το U είναι ανοικτο).

Συγκεκριμένα έχουμε οτι το εσωτερικό του $U = B(\bar{x}_0, r)$ είναι το U.

- Όσο για τα εξωτερικά και συνοριακά σημεία του
$U = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\} = B(\bar{x}_0, r)$

Πιστεύουμε οτι τα εξωτερικά είναι τα σημεία
$\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| > r\}$

(και τα συνοριακά οτι είναι τα σημεία $\{x \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r\}$)

Άρα, ας δούμε τα εξωτερικά πρώτα

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}_0, r)$ δηλ. $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| > r$

δηλ. $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Ισχυρισμός: $B(\bar{x}, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(\bar{x}_0, \varepsilon)}$:

δηλ. $\bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \Rightarrow \bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}_0, \varepsilon)$ δηλ. αν $\|\bar{y} - x\| < \varepsilon$ τότε $\|\bar{y} - \bar{x}_0\| > r$.

Όμως, $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = \|\bar{x} + \bar{y} - \bar{y} - \bar{x}_0\| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y} - \bar{x}_0\|$

η ισοδύναμα $\|\bar{y} - \bar{x}_0\| \geq \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - \|\bar{x} - \bar{y}\| > (r + \varepsilon) - \varepsilon = r$

άρα δ.ο $\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}_0, r)$ περιέχεται στα εξωτερικά

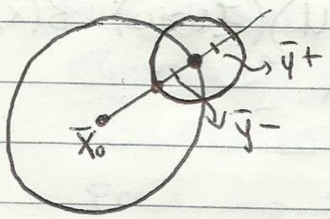
- Για τα συνοριακά σημεία ΘΔΟ: $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r\} = A$
με $A \subset \{$συνοριακά σημεία $B(\bar{x}_0, r)\}$

Έστω $\bar{x} \in A$ και $\varepsilon > 0$ ΘΔΟ
$B(\bar{x}, \varepsilon) \cap B(\bar{x}_0, r) \neq \emptyset$
$B(\bar{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}_0, r)) \neq \emptyset$

Έστω $\bar{y}_{\pm} := \bar{x} \pm \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2r} \cdot (\bar{x}-\bar{x}_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{y}_{\pm} - \bar{x} = \pm \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2r} (\bar{x}-\bar{x}_0) \Leftrightarrow$

και αυτό το σκεφτόμαστε από το σχήμα:



$\Leftrightarrow \|\bar{y}_{\pm} - \bar{x}\| = \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2r} \|\bar{x}-\bar{x}_0\|$

$= \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Μένει νδο $\underbrace{\bar{y}_+ \in \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}_0, r)}_{\Leftrightarrow \|\bar{y}_+ - \bar{x}_0\| \ge r}$ και $\underbrace{\bar{y}_- \in B(\bar{x}_0, r)}_{\Leftrightarrow \|\bar{y}_- - \bar{x}_0\| < r}$

Έχουμε

$\|\bar{y}_{\pm} - \bar{x}_0\| = \|\bar{x}-\bar{x}_0 \pm \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2r}(x-\bar{x}_0)\| =$

$= \|(1 \pm \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2r}) \cdot (\bar{x}-\bar{x}_0)\| =$

$= |1 \pm \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2r}| \cdot \underbrace{\|\bar{x}-\bar{x}_0\|}_{r} =$

$= |r \pm \underbrace{\frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2}}_{\le r/2}|$ με $(0, \frac{r}{2})$

$= r \pm \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2}$ με $(0, \frac{r}{2})$

$\Rightarrow \|\bar{y}_+ - \bar{x}_0\| = r + \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2} > r$

και

$\Rightarrow \|\bar{y}_- - \bar{x}_0\| = r - \frac{\min\{r,\varepsilon\}}{2} < r.$

Άρα, αποδείξαμε ότι το σύνολο των σημείων $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x}_0\| = r\} \subset \{$συνοριακών σημείων της $\underset{\substack{\| \\ U}}{B(\bar{x}_0, r)}\}$

Ενώ, δ.ο $U = \mathring{U}$ και $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\bar{x}_0, r) \subseteq \{$εξωτερ. σημ.$\}$

2) Βρείτε τα εξωτερικά, εσωτερικά και συνοριακά σημεία του $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0\}=U$.

Λύση

• Εσωτερικά σημεία: $\mathring{U}=\emptyset$ ΘΔΟ

Έστω $(x_0,y_0,z_0)\in U$, δηλ. $z_0=0$ και $\varepsilon>0$

Τότε $B((x_0,y_0,0),\varepsilon)=$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2<\varepsilon^2\}\not\subset U$$

[αφού πχ το $(x_0,y_0,\frac{\varepsilon}{2})\in B((x_0,y_0,z_0),\varepsilon)$]

ενώ $(x_0,y_0,\frac{\varepsilon}{2})\notin U$ αφού $\frac{\varepsilon}{2}>0$

Ισχυρισμός: $\mathbb{R}^3\setminus U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\neq 0\}\subset$
$\subset\{$ εξωτερικά σημεία του $U\}$

Έστω $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3\setminus U$ δηλ $z_0\neq 0$ τότε

$$B\left((x_0,y_0,z_0),\frac{|z_0|}{2}\right)\subset\mathbb{R}^3\setminus U$$

δηλ. $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

με $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\frac{z_0^2}{4}$

ΘΔΟ $|z|>0$

$$|z-z_0|^2<\frac{z_0^2}{4}\Leftrightarrow |z-z_0|<\frac{|z_0|}{2}$$

όπου

$$|z|=|z_0-(z-z_0)|=|z_0|-|z-z_0|>\frac{|z_0|}{2}>0$$